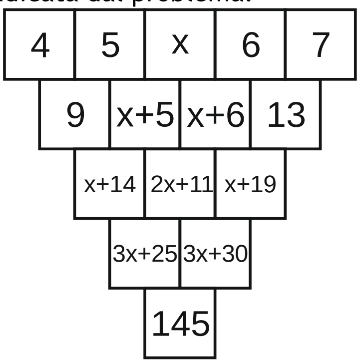
COPPA MATHESIS 2016
(21 Aprile 2016)

1. L'ISOLA DELLA FAMIGLIA [48]
Il numero di parti in cui è stata divisa la torta è $4\cdot 4\cdot 3 = 48$.

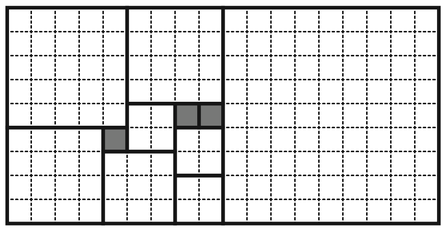
2. UN BRUSCO RISVEGLIO [1349]
Se il numero cercato è $abcd$, possiamo tradurre le informazioni del problema nelle seguenti equazioni: $b = 3a$, $c = a + b$ e $d = 3b$. Osservando la prima e l'ultima equazione scritte, segue immediatamente che $d = 3b = 3\cdot 3a = 9a$. Ora, non potendo essere d superiore a 9, poiché è una cifra, si ha che $d = 9$, $a = 1$, $b = 3$ e $c = 4$. Il numero cercato è 1349.

3. L'IDEA DI EMERGENZA [15]
Riempiamo lo schema seguendo la regola indicata dal problema:



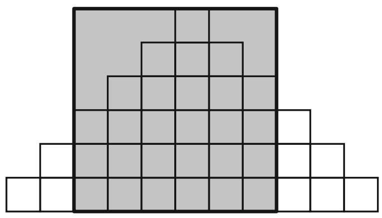
Deve accadere che $3x + 25 + 3x + 30 = 145$, cioè che $6x = 90$, $x = 15$.

4. LA STANZA DI RILEY [2592]
Osservando bene la figura, si nota che i quadrati sono tutti multipli del primo. In particolare tre hanno area 4 volte il primo, uno 9 volte, due 16, uno 25 ed infine uno che è 81 volte l'area del quadratino scuro.
L'area complessiva è quindi pari a $3\cdot 1 + 3\cdot 4 + 9 + 2\cdot 16 + 25 + 81 = 162$ volte l'area del primo quadrato, e cioè $162\cdot 40^2 = 259200\ \text{cm}^2 = 2592\ \text{dm}^2$.

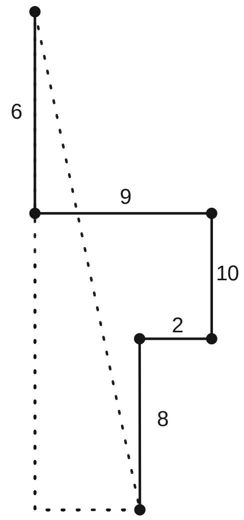


5. LA CONSOLE 2.0 [628]
Risolviamo il problema al contrario: cerchiamo il più piccolo numero di tre cifre tutte dispari e tutte distinte che moltiplicato per 4 dia come risultato un numero naturale di tre cifre, tutte pari e tutte distinte tra loro.
Sia $\overline{abc}$ il numero di partenza. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Moltiplicato per 4 diventa $400a + 40b + 4c$.
Si osserva immediatamente che $a = 1$, in quanto se fosse $a = 3$ o maggiore il numero diventerebbe di quattro cifre.
Ore se vogliamo che $400 + 40b + 4c$ sia un numero formato da sole cifre pari, è necessario che i riporti di $40b$ e $4c$ siano pari, cosa che esclude subito le cifre 3 ($4\cdot 3 = 12$) e 9 ($4\cdot 9 = 36$). Il numero $\overline{abc}$ cercato è 157 che moltiplicato per 4 diventa 628.

6. IL PRIMO GIORNO DI SCUOLA [9]
Il modo più rapido per risolvere il problema è disegnare sulla figura data un quadrato 6×6 (visto che ci sono 36 quadratini), che ricopra il massimo numero di quadratini. Il massimo che si riesce a fare è coprirne 27, come in figura. Ne restano 9 da spostare.

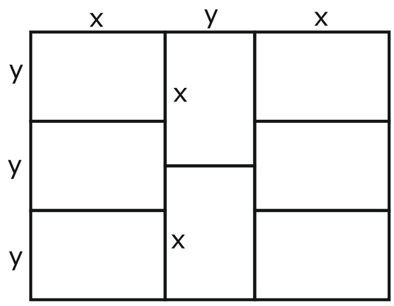


7. I RICORDI BASE [25]



Rappresentiamo il tragitto, riportando i dati come in figura.
Osserviamo che per andare dal punto di partenza al punto in cui ha tirato, Riley avrebbe percorso l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti $8+10+6=24$ e $9-2=7$.
Applicando il Teorema di Pitagora possiamo calcolare la lunghezza dell'ipotenusa: $\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{625}=25\text{ m}$.

8. LA NUOVA CASA [150]



Sia x il lato più lungo delle case e y quello più corto. Osservando le due case centrali e le tre laterali si nota che $2x=3y$, cioè $x=\frac{3}{2}y$.

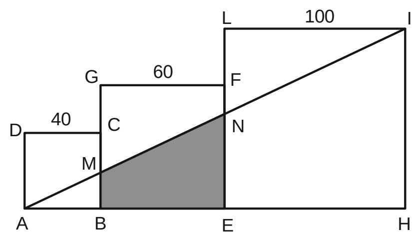
Il perimetro dell'isolato è pari a $4x+8y$ ed è uguale a 140 m, cioè $4\cdot\frac{3}{2}y+8y=140$, da cui $14y=140$. Perciò $y=10\text{ m}$ e, di conseguenza, $x=15\text{ m}$. L'area cercata vale $A=xy=15\cdot 10=150\text{ m}^2$.

9. IL PRIMO RICORDO MATEMATICO TRISTE [2016]

Sommiamo le frazioni in ogni parentesi, quindi osserviamo che ogni numeratore, eccetto l'ultimo, si semplifica con il denominatore seguente:

$$\left(\frac{1+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3}\right)\dots\left(\frac{2015+1}{2015}\right)=\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\dots\cdot\frac{\cancel{2015}}{\cancel{2014}}\cdot\frac{2016}{\cancel{2015}}=2016.$$

10. RISALITA DALL'ABISSO [2100]



Osserviamo che i triangoli ABM, AEN e AHI sono simili. In particolare conosciamo le dimensioni di entrambi i cateti dell'ultimo triangolo: $AH=40+60+100=200$ e $HI=100$. Il rapporto tra i due cateti è $\frac{1}{2}$ ovvero il cateto minore è la metà di quello maggiore.

Ne risulta che $BM=\frac{1}{2}AB=20$ e $EN=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\cdot 100=50$.

L'area del trapezio è $A_{BENM}=\frac{(BM+EN)\cdot BE}{2}=\frac{(20+50)\cdot 60}{2}=2100$.

11. IL PRIMO RICORDO MATEMATICO FELICE [256]

Rispettando l'ordine delle operazioni, nella prima parentesi, calcoliamo $4^2=16$ e nella seconda parentesi fattorizziamo $8=2^3$. Quindi, risolviamo i calcoli applicando le proprietà delle potenze.

$$\left(2^{4^2}\right)^2:\left(8^4\right)^2=\left(2^{16}\right)^2:\left(\left(2^3\right)^4\right)^2=2^{32}:2^{24}=2^8=256.$$

12. RIENTRO AL QUARTIER GENERALE [9708]

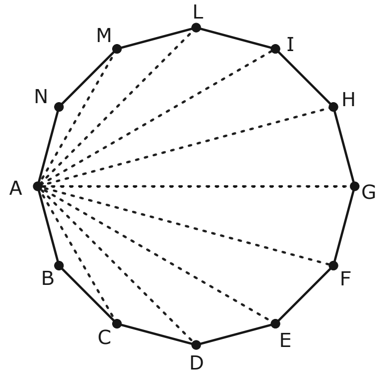
Calcoliamo la somma di tutti i numeri da 1 a 150: $1+2+\dots+150=\frac{150\cdot 151}{2}=11325$.

Il più grande multiplo di 7, minore di 150 è $147=21\cdot 7$.

La somma di tutti i multipli di 7, minori o uguali a 147 è: $7+14+\dots+147=7\cdot(1+2+\dots+21)=7\cdot\frac{21\cdot 22}{2}=1617$

Il numero cercato è la differenza tra $11325-1617=9708$.

13. CINEPRODUZIONE SOGNI [105]

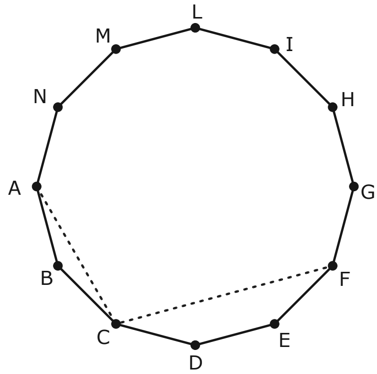


Prima di affrontare la risoluzione del problema è necessario saper calcolare l'angolo interno del dodecagono. Per fare questo suddividiamo la figura, scegliendo un vertice qualsiasi in 10 triangoli, la cui somma degli angoli è $10 \cdot 180°$. L'angolo interno α di un dodecagono regolare misura $\alpha = \dfrac{10 \cdot 180°}{12} = 150°$.

Riferendoci alla figura a lato, osserviamo che possiamo calcolare l'angolo cercato $A\hat{C}F$ togliendo da α gli angoli $B\hat{C}A$ e $D\hat{C}F$, rispettivamente angoli alla base di un triangolo isoscele e di un trapezio isoscele.

$B\hat{C}A = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$; $D\hat{C}F = \dfrac{360° - 2 \cdot 150°}{2} = 30°$.

$A\hat{C}F = 150° - 15° - 30° = 105°$.



14. TRISTEZZA TOCCA I RICORDI [90]

Scriviamo le basi delle due potenze secondo la loro scomposizione in fattori primi e poi applichiamo le proprietà delle potenze:

$$20^{50} \cdot 50^{20} = \left(2^2 \cdot 5\right)^{50} \cdot \left(2 \cdot 5^2\right)^{20} = 2^{100} \cdot 5^{50} \cdot 2^{20} \cdot 5^{40} = 2^{120} \cdot 5^{90}.$$

Siccome un 10 (e quindi uno zero alla fine del numero) si ottiene dal prodotto di un 2 con un 5, e le potenze di 5 sono meno delle potenze di 2, alla fine del numero avremo solamente 90 zeri.

15. BING BONG [199]

Risolviamo l'equazione sfruttando le informazioni date dalla regola di calcolo:

$$(x \Diamond x) \Diamond 2 = 100$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \Diamond 2 = 100$$

$$\frac{2}{x} \Diamond 2 = 100$$

$$\frac{1}{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2} = 100$$

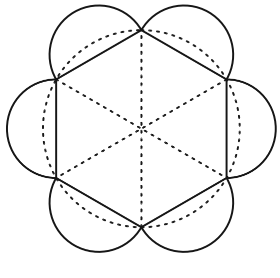
$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 100$$

$$\frac{x+1}{2} = 100$$

$$x + 1 = 200$$

$$x = 199.$$

16. RICORDI TRISTI [495]



Unendo i sei punti dove le semicirconferenze toccano la grande circonferenza è possibile tracciare un esagono. Unendo questi punti con il centro, possiamo dividere l'esagono in sei triangoli equilateri di lato noto (vedi figura a lato). L'area cercata è pari all'area dell'esagono inscritto (i sei triangoli), più l'area delle sei semicirconferenze ad esso adiacenti:

$$A = A_{esagono} + 6 \cdot A_{semi\_cerchio} = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2} + 6 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 6 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 150\sqrt{3} + 75\pi \cong 495,42 \text{ cm}^2.$$

17. UN GROSSO PROBLEMA [12]

Riscriviamo la frazione come parte intera e parte frazionaria propria: $\frac{54}{13}=4+\frac{2}{13}$. Scriviamo la seconda parte con numeratore 1: $\frac{54}{13}=4+\frac{2}{13}=4+\frac{1}{\frac{13}{2}}=4+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}$. Pertanto $x=4$, $y=6$ e $z=2$, da cui si ricava che $x+y+z=4+6+2=12$.

18. PAPÀ SI ARRABBIA [8]

Scomponendo 5000 in fattori primi otteniamo $2^3\cdot5^4$. I valori di n per cui $2^3\cdot5^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$ sono: 1, 2, 3 e 4. Non dobbiamo dimenticare lo 0 e nemmeno le potenze negative -1, -2 e -3. In totale: 8 valori.

19. DI MALE IN PEGGIO [5139]

Osservando la tabella a fianco, dove sono stati evidenziati alcuni quadratini 2×2, è possibile capire la strategia migliore per ottenere il risultato finale senza dover calcolare uno ad uno tutti i valori delle singole celle.

Infatti basta sommare i numeri della prima riga e della prima colonna (facendo attenzione a non contare due volte il numero 1), ed aggiungere a questo risultato il valore di 4900 (ottenuto facendo $49\cdot100$, visto che ognuno dei 49 quadratini 2×2 ha somma 100). Il risultato cercato è

$$2(1+2+3+...+15)-1+4900=\cancel{2}\cdot\frac{15\cdot16}{\cancel{2}}-1+4900=5139.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														

20. NEL FRATTEMPO… [58]

Siccome ogni scaffale deve contenere 10800 sfere e ogni mensola deve avere lo stesso numero di sfere, è sufficiente trovare quante mensole possono esserci calcolando tutti i divisori propri di 10800. Infatti se prendessi un numero di mensole che non è divisore di 10800, allora non riuscirei a distribuire lo stesso numero di sfere fra tutte le mensole. Tra tutti i divisori devo però escludere 1 (perché non posso avere un'unica mensola con 10800 ricordi) e 10800 (perché non ci possono essere 10800 mensole con una sola sfera).

Siccome $10800=2^4\cdot3^3\cdot5^2$, 10800 ha $(4+1)(3+1)(2+1)=60$ divisori. Tolti 1 e 10800, restano 58 possibilità.