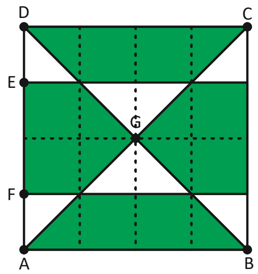
COPPA MATHESIS 2015
SOLUZIONI

1. MARGO, EDITH E AGNES [1020]

Dobbiamo trovare il primo numero maggiore di 1000 che sia anche multiplo del $m.c.m(1,2,3,4,5,6)=60$.
Eseguendo la divisione $1000:60=16$ con resto 40. Perciò il numero che ci serve è $60\cdot 17=1020$.

2. ASSEMBLEA DEI MINION [7500]



Quadrettando la figura si può osservare che la parte verde è i $\frac{12}{16}$ dell'area del quadrato e quindi occupa un'area pari a $\frac{12}{16}\cdot 10000=7500\ \mathrm{m}^2$.

3. BISCOTTI PER VECTOR [174]

Sia x il numero dei biscotti comprati ed n il numero degli amici.
Le affermazioni di Vector possono essere tradotte nelle seguenti equazioni:
$x=24(n+1)+6$
$x=29n$.
Uguagliando le due espressioni otteniamo
$29n=24(n+1)+6$, che risolta porta a $5n=30$, cioè $n=6$.
Il numero dei biscotti è $x=29\cdot 6=174$

4. IL FURTO DELLA PIRAMIDE [1008]

$$\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2014}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2014}=\frac{1}{2}+\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\ldots}{\cancel{5}}\ldots\frac{\cancel{2014}}{\ldots}\cdot\frac{2015}{\cancel{2014}}=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{2015}{2}=\frac{2016}{2}=1008$$

5. L'ADOZIONE [423]

Pescando 1 euro dalla scatola con sopra scritto "3" l'unico modo per rendere falsa la somma è che nella scatola vi siano due monete da 1 euro.
A questo punto nella scatola con 2 monete da 2 euro non può esservi scritto "4" ma dovrà esservi scritto "2". Resta l'ultima scatola che contiene una moneta per tipo, con sopra scritto "2"
Quindi La risposta è 423.

6. IL COVO DI VECTOR [45]

Osservando le tre equazioni si intuisce che i tre numeri dovrebbero essere quadrati perfetti e, in particolare dalla terza equazione si vede che $a<b<25$, quindi $a,b\in\{1,4,9,16\}$. Ora siccome $16+9=25$ allora almeno uno dei due valori di a e b cercati dev'essere diverso sia da 16 che da 9. Se così non fosse, cioè se $a=16$ e $b=9$ o viceversa, si avrebbe che $c=0$. Inoltre le prime due equazioni sarebbero false. Almeno uno dei due valori cercati è diverso da questi.
Ponendo invece $c=25$ si ottiene (sempre dalla terza equazione) $a+b=20$, cosa che è verificata dalla coppia $(4,16)$.
Pertanto la soluzione cercata è proprio $a=4$, $b=16$ e $c=25$.

7. BISCOTTI [5]

La domanda di Agnes può essere convertita in un'equazione dove x è il numero di biscotti che si comprano con un euro. Il prezzo di un biscotto si può ottenere sia come $\frac{1\ €}{x \text{ biscotti con } 1\ €}$ che da $\frac{x}{25}$. Si ottiene l'equazione $\frac{1}{x}=\frac{x}{25}$, cioè $x^2=25$ la cui unica soluzione utilizzabile è $x=5$.

8. PRESTITO NEGATO [3400]

Mettendo in colonna i numeri a gruppi di tre e cancellando il termine centrale ci restano:

1	~~2~~	3
4	~~5~~	6
7	~~8~~	9
	...	
97	~~98~~	99
100		

Cominciamo a fare la somma della terza colonna:

$$3+6+9+...+99=3\cdot(1+2+3+33)=3\cdot\frac{33\cdot 34}{2}=1683$$

Escludendo il valore 100 la prima colonna può essere ottenuta dalla terza togliendo $33\cdot 2$ visto che ciascuno dei 33 numeri della prima è minore di 2 rispetto al relativo numero della terza colonna.

$1+4+7+...+97=1683-66=1617$

Alla somma trovata dobbiamo aggiungere il numero 100 che avevamo lasciato momentaneamente da parte.

Il totale cercato è $1683+1617+100=3400$.

9. IL RAGGIO RESTRINGENTE [5000]

Siano x il numero di fogli colpiti dal raggio restringente e sia s lo spessore originale di ogni foglio. Lo spessore della risma è diminuito di $\frac{40}{100}\cdot 10000s$ che è pari a $\frac{80}{100}xs$.

Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\frac{40}{100}\cdot 10000s=\frac{80}{100}xs.$$

Semplificando s e risolvendo si ottiene: $x=\frac{10000}{2}=5000$.

10. LE TRE ORFANELLE E I LORO PELUCHE [48]

Consideriamo ciascuna coppia Bambina-Peluche come una cosa sola.

Per ogni coppia abbiamo 2 possibili modi di far sedere la bambina e il suo peluche su due sedie vicine. Invece abbiamo 6 possibili modi di far sedere le tre coppie una di fianco all'altra. Se le tre coppie sono A (Agnes), E (Edith) e M (Margot), allora possiamo disporle in uno dei seguenti modi:

AEM AME EMA EAM MAE MEA.

Quindi in totale vi sono $6\cdot 2\cdot 2\cdot 2=48$ modi di far sedere le bambine con i loro pupazzi.

11. SOLDI PER IL RAZZO [1988]

Mettendo $n=1999$ si avrebbe che $1999+S(1999)=1999+28=2027$ che è di 13 più grande di 2014

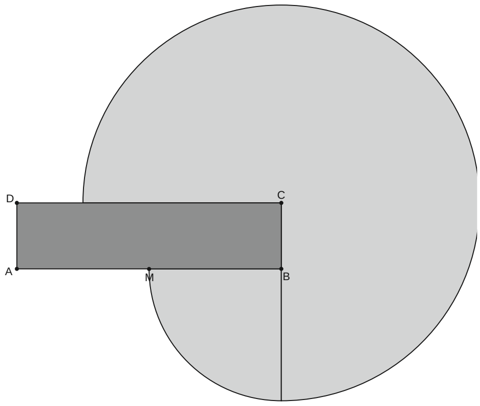
Diminuendo di 1 il valore di n, la somma di $n+S(n)$ diminuisce di 2. Per avere una somma pari, dobbiamo scendere alla decina precedente.

Ponendo $n=1989$ abbiamo $1989+S(1989)=1989+27=2016$.

Il valore cercato è $n=1988$.

12. KYLE [24]

L'area che Kyle può raggiungere è pari a tre quarti di circonferenza di raggio pari alla somma $BC+BM$ e un quarto di circonferenza di raggio BM.



$$A=\frac{3}{4}\pi\cdot(1+2)^2+\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{27}{4}\pi+\frac{4}{4}\pi=\frac{31}{4}\pi\cong 24,335.$$

13. VECTOR [1248]

L'unico numero $abcd$ tale che a divide b, b divide c e c divide d è 1248.
Infatti non c'è altra cifra al di fuori dell'8 ad avere almeno 3 divisori.

14. ISTITUTO FEMMINILE DELLA SIGHORA HATTIE [110]

Calcoliamo $N=\dfrac{m.c.m(24;28)}{M.C.D.(24;28)}$.

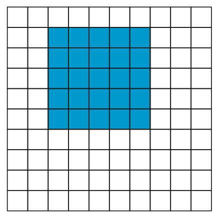
Siccome $24=2^3\cdot 3$ e $28=2^2\cdot 7$ $N=\dfrac{2^3\cdot 3\cdot 7}{2^2}=2\cdot 3\cdot 7=42$.

Ripetiamo l'operazione sostituendo $n=42$ nella formula di partenza.

$$\overline{N}=\frac{m.c.m(40;44)}{M.C.D.(40;44)}$$

Siccome $40=2^3\cdot 5$ e $44=2^2\cdot 11$ $\overline{N}=\dfrac{2^3\cdot 5\cdot 11}{2^2}=2\cdot 5\cdot 11=110$.

15. LE BAMBINE TORNANO ALL'ORFANOTROFIO [120]



Il rettangolo, per comprendere il quadrato evidenziato, deve necessariamente avere i due lati paralleli uno a destra e l'altro a sinistra, uno sopra e l'altro sotto.
A sinistra possiamo tracciare il lato sulla griglia in 3 modi diversi, a destra in 4.
Sopra abbiamo solo 2 possibilità, mentre sotto ne abbiamo ben 5.
In totale vi sono $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ rettangoli diversi.
N.B. Un quadrato è un particolare rettangolo e quindi va contato.

16. LA LUNA RUBATA [9261]

Prima soluzione.

1	2	3	4	5	...	21
2	3	4	5	6	...	22
3	4	5	6	7	...	23
4	5	6	7	8	...	24
5	6	7	8	9	...	25
...	...	...	...	...	⋱	...
21	22	23	24	25	...	41

Sommiamo riga per riga. La prima riga ha per somma $\dfrac{21\cdot 22}{2}=231$.

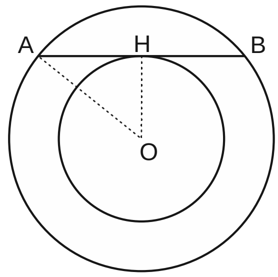
I numeri della seconda riga sono tutti di più grandi di una unità. La somma della seconda riga è quindi pari alla prima più 21.
I numeri della terza riga sono più grandi due unità rispetto alla prima. La somma è quindi pari alla somma della prima più $21\cdot 2$.
Procedendo in questa maniera la somma di tutti i numeri è:

$$231\cdot 21+21(1+2+3+...+20)=231\cdot 21+21\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=9261.$$

Seconda soluzione.
Se prendiamo una tabella identica a quella che dobbiamo sommare, ma simmetrica rispetto alla diagonale (in modo tale che l'ultima casella in basso a destra sia la casella contenente il numero 1) e la poniamo sopra a quella che possediamo, otteniamo che in ogni cella la somma è 42. Abbiamo $21\cdot 21$ caselle con il valore 42 da sommare. Così facendo, però abbiamo ottenuto il doppio del valore cercato.

Il totale è $\dfrac{21\cdot 21\cdot 42}{2}=21^3=9261$.

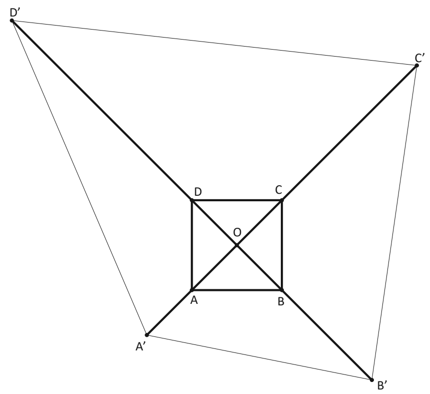
17. LA LUNA PER LE TRE SORELLE [1256]



Siano r il raggio della circonferenza interna e R il raggio della circonferenza esterna. L'area della corona circolare cercata misura $\pi(R^2 - r^2)$. Per il Teorema di Pitagora, $R^2 - r^2 = AH^2 = 20^2 = 400$.

L'area è $400\pi \cong 1256 \text{ m}^2$

18. "RUBEREMO LA LUNA" [1200]



Costruiamo la figura descritta:

Il quadrilatero $A'B'C'D'$ è formato da quattro triangoli rettangoli i cui cateti sono: $OA' = 10\sqrt{2}$, $OB' = 15\sqrt{2}$, $OC' = 20\sqrt{2}$ e $OD' = 25\sqrt{2}$.

L'area richiesta è:

$$A_{A'B'C'D'} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2}}{2} + \frac{20\sqrt{2} \cdot 25\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{2} \cdot 25\sqrt{2}}{2} =$$

$150 + 300 + 500 + 250 = 1200 \text{ cm}^2$.

19. LA BANCA DEI CATTIVI [81]

Per prima cosa applichiamo le regole di calcolo delle frazioni e cerchiamo di semplificare la scrittura data:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{b}}{c} \qquad a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$$ che è equivalente a $c^2 = 1$.

Ne segue che il valore di c deve necessariamente essere 1 mentre a e b possono assumere qualunque valore tra 1 e 9. Vi sono quindi $9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$ possibili terne $(a; b; c)$ di valori che risolvono il problema.

20. L'UNICORNO [98]

$100 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2$

Da cui segue che $a^2 + b^2 = 100 - 2 = 98$.