“MATEMATICA IN VILLA” (28-04-2012) - SOLUZIONI

1. GRANDI E PICCOLI [7707]
Il più grande numero di 4 cifre tutte dispari è 9753, mentre il più piccolo formato da sole cifre pari è 2046.
La loro differenza è $9753-2046=7707$

2. CONTI [0]

$$\frac{(2012-0)\times(2011-1)\times(2010-2)\times\ldots\times(2-2010)\times(1-2011)\times(0-2012)}{(2011-0)\times(2010-1)\times(2009-2)\times\ldots\times(2-2009)\times(1-2010)\times(0-2011)}$$

Osservando bene il numeratore ci si accorge che i due numeri sono o sempre pari o sempre dispari, ma la loro somma è sempre 2012, questo vuol dire che c'è una parentesi che contiene $(1006-1006)$, cioè c'è un fattore che vale 0, rendendo tutto il numeratore pari a zero.

3. CAVALIERI E FURFANTI [9901]
Se il primo fosse un cavaliere, gli altri 99 dovrebbero essere tutti furfanti, ma questo è in contraddizione con la frase che tutti loro dicono. Quindi il primo è un furfante e almeno uno dei successivi deve essere un cavaliere.
Il ragionamento può essere ripetuto per tutti i seguenti, tranne che per l'ultimo, che deve essere un cavaliere. La frase che dice è vera in quanto non vi è nessun altro dopo di lui.
In tutto ci sono 99 furfanti ed un solo cavaliere

4. LIBRI [32]
Se formalizziamo le informazioni del problema,
$16A+8G=12A+10G$

Da cui segue che
$4A=2G$, cioè $G=2A$

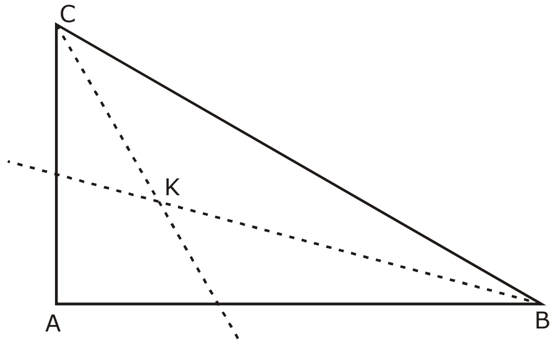
Quindi ogni libro di geometria può essere sostituito da 2 libri di Algebra. Servono 32 libri di algebra per riempire tutto lo scaffale

5. IL VALORE DI UN CAVALLO [92]
Per 12 mesi di lavoro lo stipendio è di 100 monete più un cavallo
Per 7 mesi il lavoratore riceve 20 monete ed un cavallo.

$$\frac{100+c}{12}=\frac{20+c}{7} \qquad 700+7c=240+12c \qquad 5c=460 \qquad c=92$$

6. FULL [27]
Valutiamo il peggiore dei casi. Prendo le prime 13 carte e sono tutte diverse. Ne prendo altre 13 e sono ancora tutte diverse. Mi serve ancora una carta per avere la certezza di avere un tris per il full.
$13+13+1=27$

7. ANGOLI [135]

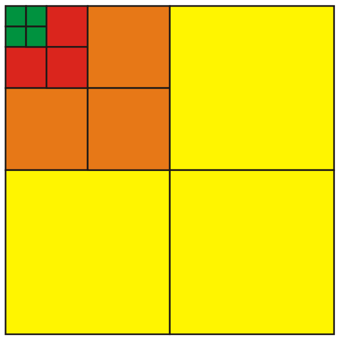


Sia $x = A\hat{B}K$, dai del problema possiamo dire che $K\hat{B}C = x$, $A\hat{C}B = 90° - 2x$ e che $K\hat{C}B = 45 - x$, essendo la metà di $A\hat{C}B$.

Segue che $C\hat{K}B = 180° - x - (45° - x) = 135°$

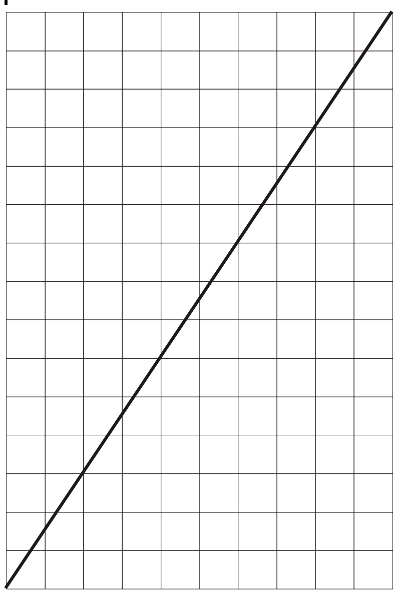
8. GIVE ME FIVE [21]
Procediamo per casi:
usando la sola cifra 5 ve ne sono 3: 5-50-500;
usando le cifre 1 e 4 ve ne sono 6: 14 – 41 -104 - 140 – 401 - 410;
usando le cifre 2 e 3 ve ne sono altri 6: 23 – 32 – 203 - 230 – 302 – 320;
usando le cifre 1, 1 e 3 ve ne sono 3: 113 – 131 – 311;
infine, usando le cifre 1, 2 e 2 ve ne sono altre 3: 122 – 212 – 221.

9. DIVISIONI DI QUADRATI [301]



Per ogni divisione si formano 3 quadrati più uno che sarà diviso nella divisione successiva. Dopo 100 divisioni potrò vedere $99 \cdot 3$ quadrati più l'ultima divisione che me ne mostra 4, per un totale di 301 quadratini.

10. CARTA MILLIMETRATA [15]
Proviamo a semplificare la situazione. Tracciamo un segmento sui quadretti:



Per come abbiamo costruito il segmento, osserviamo che ogni 2 quadretti in orizzontale ed ogni 3 in verticale avremo un incrocio. Il numero totale degli incroci cercati è quindi il massimo comun divisore dei due lati, più il punto di partenza.

Fattorizziamo e 210 e calcoliamo il $M.C.D.$:

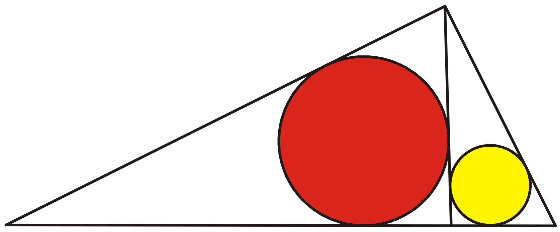
$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
$M.C.D.(70\,;42) = 14$

La soluzione è quindi 15.

11. CERCHI [0916]

Le 2 circonferenze sono inscritte in 2 triangoli rettangoli simili, il rapporto di similitudine è $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ quindi il rapporto tra le aree è $\frac{9}{16}$.



12. ETÀ' [32]

Se chiamiamo x l'età di Carla, sua madre deve avere il doppio dei suoi anni ($2x$) e il padre $2x+5$. Possiamo, dall'ultima affermazione trasformare il problema in equazione:

$x+2x+2x+5=140$

$5x=135$

$x=27$

Il problema chiede l'età del padre che aveva $x+5=32$ anni.

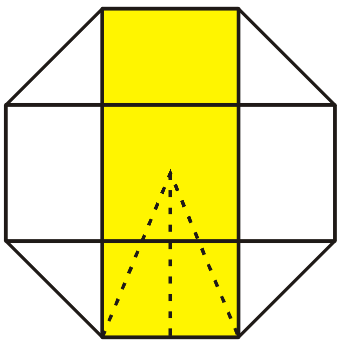
13. SENZA PRIMI [35]

I numeri primi di una sola cifra sono 2,3,5 e 7, quindi la richiesta del problema è equivalente a "Quanti numeri minori di 100 posso formare usando le sole 6 cifre 0,1,4,6,8 e 9?"

Possiamo formare $6 \cdot 6=36$ numeri, dai quali dobbiamo togliere lo zero che è compreso nel calcolo appena effettuato, ma che non può essere considerato in base ai dati del problema.

14. OTTAGONO [200]

Sia x il lato dell'ottagono e sia a il suo apotema. L'area dell'ottagono è data da $4x \cdot a$, mentre l'area del rettangolo cercato è dato da $x \cdot 2a$. Si osserva che il rettangolo è esattamente la metà dell'area dell'ottagono, quindi la risposta è $200\,\text{m}^2$.



15. EQUAZIONI [253]

Trova tutte le soluzioni $(x;y)$ di numeri naturali positivi dell'equazione

$x(x-y)=127$

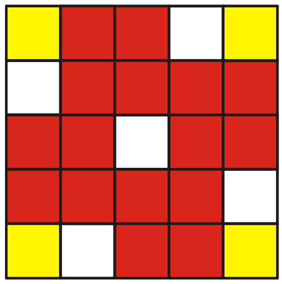
Dai come risposta la somma di tutti i valori x e y trovati.

Si osserva che 127 è un numero primo, quindi abbiamo 2 sole possibilità:

$x=1$ e $x-y=127$, da cui segue che $y=x-127=-126$ che non è accettabile;

$x=127$ e $x-y=1$, da cui segue che $y=x-1=126$, unica soluzione ammessa.

$x=127$ e $x-y=1$, da cui segue che $y=x-1=126$, unica soluzione ammessa.



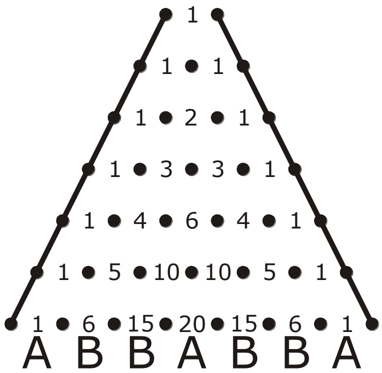
16. ANCORA QUADRATI [2025]

Se dividiamo anche i quadrati rossi in quattro quadratini, ci rendiamo conto che l'area di tre quadratini è esattamente 243 cm^2. Siccome il quadrato grande è composto da 25 quadratini, la sua area è

$$A = \frac{25}{3} \cdot 243 = 2025\,\mathrm{cm}^2$$

17. FATTORIALE [9]

Siccome $24 = 2^3 \cdot 3$ che posso anche scrivere come $2^2 \cdot 3 \cdot 2$, 24 divide esattamente tutti i fattoriali da $4!$ in su, il resto della divisione è dato semplicemente da $3!+2!+1! = 6+2+1 = 9$



18. IL GIOCO [43]

Per prima cosa calcoliamo tutti i possibili percorsi, per ogni uscita.
La probabilità cercata è dunque:

$$P(A) = \frac{1+20+1}{1+6+15+20+15+6+1} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

19. RESTI [517]

Indichiamo i dati sotto forma di equazioni:

$$\begin{aligned} 209 &= ay + x \\ 124 &= by + x \\ 73 &= cy + x \end{aligned}$$

Eseguiamo la sottrazione delle equazioni a 2 a 2:

$$\begin{array}{ll} 209-124 = ay-by & (a-b)y = 85 = 17 \cdot 5 \\ 209-73 = ay-cy & (a-c)y = 136 = 17 \cdot 8 \\ 124-73 = by-cy & (b-c)y = 51 = 17 \cdot 3 \end{array}$$

Si osserva che dalla fattorizzazione dei risultati ottenuti, l'unico numero che compare nelle fattorizzazioni di tutti e tre i casi è 17, il solo candidato a sostituire la y.

Eseguendo i calcoli di divisione, ad esempio su 73, possiamo scoprire che $x = 5$.