“MATEMATICA IN VILLA”

CALDOGNO – 30 aprile 2011

1. ESPRESSIONI [11]

$$20\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{10^2}\right)=$$

$$20\cdot\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9-1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdot\left(\frac{25-1}{25}\right)\cdot\left(\frac{36-1}{36}\right)\cdot\left(\frac{49-1}{49}\right)\cdot\left(\frac{64-1}{64}\right)\cdot\left(\frac{81-1}{81}\right)\cdot\left(\frac{100-1}{100}\right)=$$

$$20\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{63}{64}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{99}{100}=11$$

2. THE GREAT-GRANDFATHER / BISNONNO [97]

L'anno scorso le possibili età erano 80, 88 oppure 96

ANNO SCORSO	QUEST'ANNO	PROSSIMO ANNO	
80	81	82	Non divisibile per 7
88	89	90	Non divisibile per 7
96	**97**	**98**	**Divisibile per 7**

3. COINCIDENZE [2502]

I tre aerei si ritroveranno all'aeroporto tra $m.c.m(15,18,10)=90$ giorni

Se oggi è il 27 novembre, servono 3 giorni per arrivare a fine mese,
31 giorni a Dicembre e 31 a Gennaio per un totale di 65 giorni. Ne avanzano 25.
Il giorno del ritrovo sarà il 25 febbraio

4. NUMERI DECIMALI [12]

Il numero deve essere composto da 3 cifre ed una virgola. Ora la virgola non può occupare né la prima né l'ultima posizione, quindi:
con la virgola al secondo posto:

□,□□

Abbiamo in tutto 6 possibilità (1,23 1,32 2,13 2,31 3,12 3,21)

□□,□

E ne abbiamo altre 6 con la virgola al terzo posto (12,3 13,2 21,3 23,1 31,2 32,1).

5. BOTTIGLIE [665]

10 bottiglie vuote pesano 800 g, quindi 1 bottiglia vuota pesa 80 g.

800 bottiglie piene pesano 1000 kg, quindi 1 bottiglia piena pesa $\frac{1000\cdot 1000}{800}\,g=1250\,g$

Il contenuto della bottiglia è quindi di 1170 g

Una bottiglia mezza vuota pesa quindi $80\,g+\frac{1170}{2}\,g=665\,g$

6. POTENZE [50]
Possiamo riscrivere la disuguaglianza sfruttando le proprietà delle potenze:

$$n^{213} > (7^2)^{213}$$

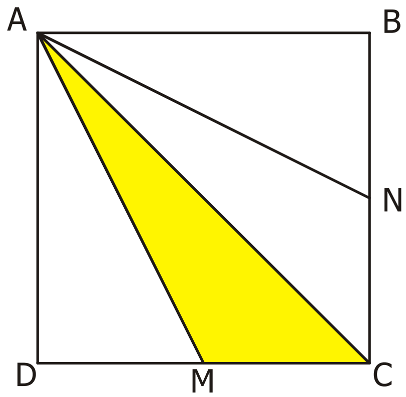
che semplificata dà

$$n > 7^2$$

Il più piccolo numero naturale n che supera 49 è 50.

7. PIEGA E SPIEGA [64]
Con una piega il foglio viene diviso in 2 parti (= 2^1), con la seconda piega in 4 (= 2^2) e con la terza piega in 8 (= 2^3). Continuando in questa maniera dopo 6 pieghe il foglio sarà diviso in 2^6 parti. Un punteruolo realizzerà quindi 64 fori sul foglio di carta.

8. TRIANGOLI NEL QUADRATO [40]
Tracciamo la diagonale AC. Si osserva che il triangolo ACM e il triangolo ACN sono uguali e la loro area deve essere la metà di quella dei triangoli ADM e ABN.
Consideriamo i triangoli ADM e AMC; essi hanno basi diverse, ma stessa altezza AD. Per avere area doppia, il triangolo ADM deve avere base doppia del triangolo AMC.
La misura di DM è quindi $\frac{2}{3}DC = 40\,cm$



9. ACQUA E FERRO [140]
Ricordiamo che $1\,l = 1\,dm^3$.
Immergendo il ferro, avremo che $8000\,cm^3$ di acqua tracimano, pari a $8\,dm^3 = 8\,l$
Togliendo anche 2 litri di mercurio, nella vasca restano
$150\,l - 8\,l - 2\,l = 140\,l$ di acqua.

10. GIROTONDO NUMERICO [149]

La soluzione è determinabile con una equazione. Fissata l'incognita in una cella qualunque, è sufficiente percorrere lo schema trascrivendo le operazioni indicate:

$$\left\{\left[\left(\frac{x}{5}+1\right)\cdot 4-5\right]\cdot 5-10\right\}:3 = x$$

Risolvendo l'equazione si determina il corretto valore per la x:

$$\left\{\left[\frac{4x+20}{5}-5\right]\cdot 5-10\right\}:3 = x$$

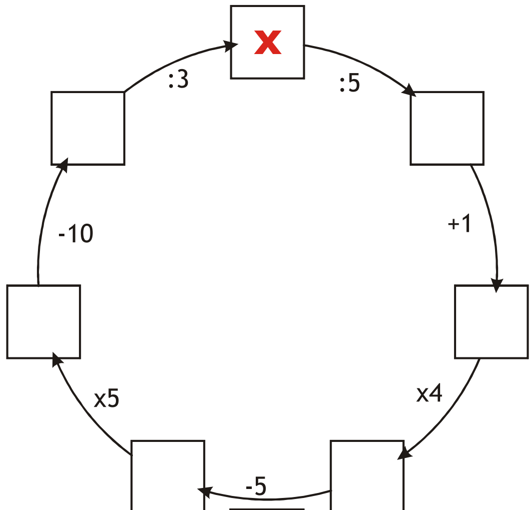
$$\left\{\left[\frac{4x+20-25}{5}\right]\cdot 5-10\right\}:3 = x$$

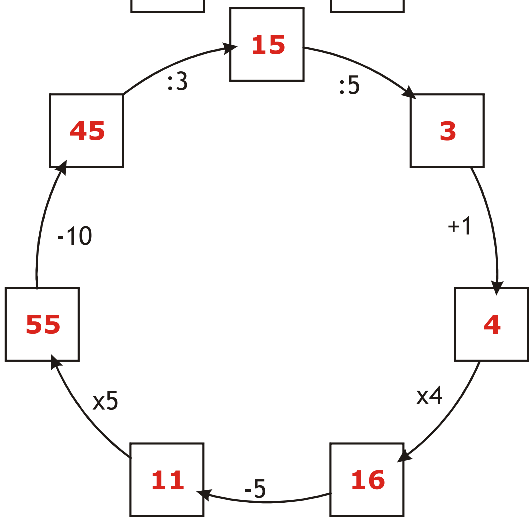
$$\{4x-5-10\}:3 = x$$

$$\frac{4x-15}{3} = x$$

$$4x-15 = 3x$$

$$x = 15$$





11. LA CISTERNA BUCATA [6340]

La prima informazione da calcolare è in quale giorno ci sarà la prima fuoriuscita.

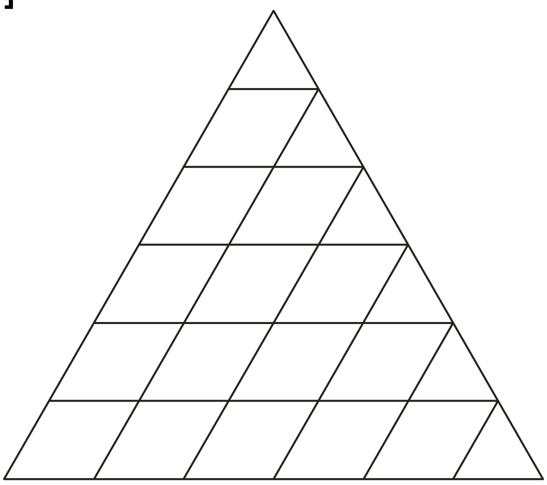
giorno	Aumento (+60cm)	Perdita (-20cm)
1	60 cm	40cm
2	100 cm	80cm
3	140 cm	120 cm
4	180 cm	160 cm
5	220 cm	200 cm
6	260 cm = FUORIUSCITA	

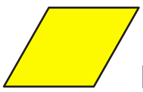
Il sesto giorno si raggiungerà per la prima volta il livello di 2 m e mezzo.
Resta da scoprire in quanto tempo si riempiono 50 cm.
Impostiamo una proporzione $50 : x = 60 : 8\,ore$

$$x = \frac{50 \cdot 8}{60}\,\text{ore} = \frac{20}{3}\,\text{ore} = 6\,\text{ore}\;40\;\text{minuti}$$

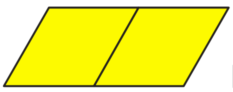
La cisterna traboccherà alle ore 15 e 40. Siccome la richiesta è di mettere l'ora in formato AM/PM, l'ora richiesta è 3.40
La risposta è quindi 6340

12. PARALLELOGRAMMI [70]

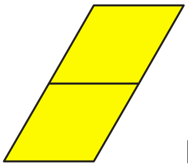




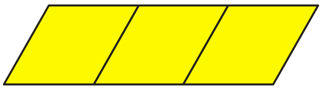
Parallelogrammi 1x1
Ne contiamo 1 sulla prima riga, 2 sulla seconda, tre sulla terza e così via
=1+2+3+4+5=15



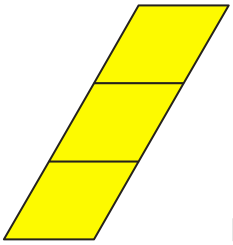
Parallelogrammi 2x1
Ne contiamo 1 sulla terza riga, 2 sulla quarta…
=1+2+3+4=10

 Parallelogrammi 1x2

Analogamente al caso precedente, osservando le colonne, ne contiamo 1 sulla quarta colonna, 2 sulla terza…
=1+2+3+4=10

 Parallelogrammi 3x1

Ne contiamo 1 sulla terza riga, 2 sulla quarta e tre sulla quinta.
=1+2+3=6

 Parallelogrammi 1x3

Analogamente al caso precedente, osservando le colonne, ne contiamo 1 sulla terza colonna, 2 sulla seconda e tre sulla prima.
=1+2+3=6

Procedendo in questa maniera si contano
1+2=3 parallelogrammi 4x1 e altrettanti 1x4.
1 solo è il parallelogramma 5x1 ed 1 è quello 1x5.

Totale parziale: 55.

Restano da contare i parallelogrammi
2x2 che ce ne sono 1+2+3=6
2x3 che ce ne sono 1+2=3
3x2 che ce ne sono 1+2=3
3x3 che ce n'è uno solo, così come 4x2 e 2x4.

55+15=70 parallelogrammi

13. LA SCUOLA DI PITAGORA [28]

Traduciamo l'affermazione in un'equazione: siano x gli studenti di Pitagora:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$$

Risolvendo:

$$\frac{14x+7x+4x+28\cdot 3}{28}=\frac{28x}{28}$$

$$x=28$$

La soluzione poteva essere trovata cercando un multiplo del $m.c.m.(2,4,7)$ che verificasse i dati del problema.
Proprio il minimo comune multiplo risulta esserne la soluzione.

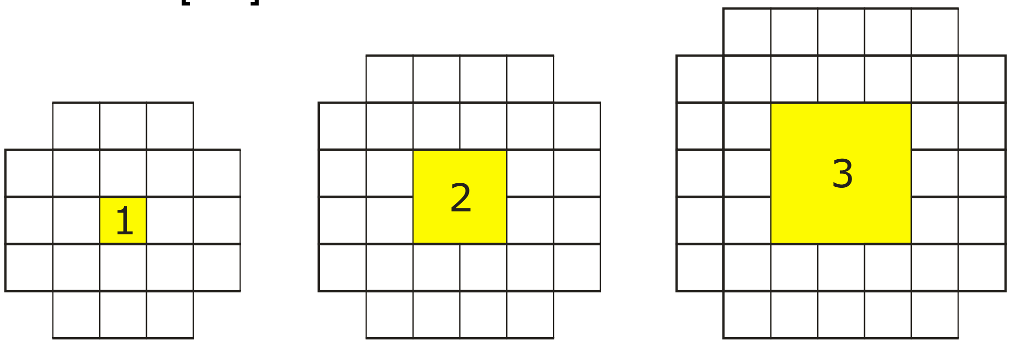
14. IL TRENO E IL PONTE [60]

Per superare il ponte, il treno deve viaggiare ad una velocità di $\frac{400\,m+100\,m}{30\sec}=\frac{50}{3}m/\sec$

Che trasformati in km/h danno

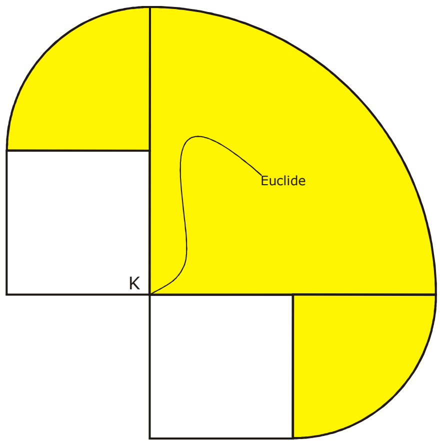
$\frac{50\,m}{3\sec}=\frac{50}{1000}km\cdot\frac{3600}{3}h=60\,km/h$

15. ATTORNO AL BUCO [812]



Se il buco ha lato n sono necessari 4 rettangoli di lati nx2 più 3 angoli di 3 quadratini ciascuno. Sono quindi necessari $12+8n$ quadratini.
Sostituendo a n il valore 100 richiesto si ottiene 812, la soluzione.

16. EUCLIDE [471]



Euclide avrà la possibilità di calpestare uno spazio pari ad un quarto di cerchio di raggio 20 m e due quarti di cerchio di raggio 10 m.

La soluzione è quindi $\frac{400\pi}{4}+\frac{100\pi}{2}=150\pi\ \text{m}^2$

che, approssimato, dà $150\cdot 3{,}14=471\,\text{m}^2$.

17. SOMMA INFINITA [73]

Trasformiamo la somma richiesta in decimali:

$\frac{1}{1}+\frac{2}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+...=$

$1+0{,}2+0{,}01+0{,}002+0{,}0001+0{,}00002+...=1{,}\overline{21}$

che ritrasformato in frazione equivale a:

$1{,}\overline{21}=\frac{121-1}{99}=\frac{120}{99}=\frac{40}{33}$

La soluzione richiesta è quindi 73

18. UOVA [119]

Per facilitare il calcolo immaginiamo di aggiungere un uovo.
Così facendo Maria ha un numero di uova divisibile sia per 2 che per 3 che per 4 che per 5 che per 6. Il numero cercato è quindi un multiplo del $m.c.m(2,3,4,5,6)=60$.
Devo quindi trovare tra i multipli di 60 il più piccolo che diviso per 7 mi dia resto 1.

$60:7=8\,\text{con resto}\,4$

$120:7=17\,\text{con resto}\,1$

Maria ha quindi 119 uova

19. CODICE SEGRETO [2910]

$\alpha\alpha\alpha\alpha - \beta\beta\beta + \gamma\gamma - \delta = 1234$

Se riscrivo la consegna in questa maniera:

$\alpha\alpha\alpha\alpha - 1234 = \beta\beta\beta - \gamma\gamma + \delta$

Si osserva che a sinistra il numero deve dare un risultato a tre cifre e quindi $\alpha = 2$

Il problema diventa quindi

$2222 - 1234 = \beta\beta\beta - \gamma\gamma + \delta$

$988 = \beta\beta\beta - \gamma\gamma + \delta$

$\gamma\gamma - \delta = \beta\beta\beta - 988$

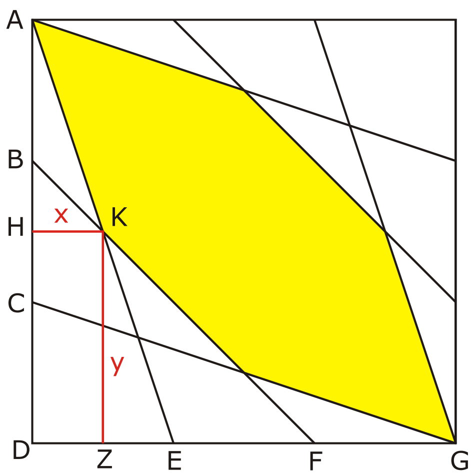
Nell'ultima uguaglianza, a destra dell'uguale devo ottenere un numero positivo, quindi $\beta = 9$

$\gamma\gamma - \delta = 11$

Quindi $\gamma = 1 \quad \delta = 0$

La soluzione è quindi 2910

20. ESAGONO [400]



Chiamiamo x e y i segmenti ottenuti tracciando le perpendicolari KH e KZ ai lati del quadrato da uno dei vertici dell'esagono.

Consideriamo i triangoli ADE e KZE, simili per costruzione:

$ZE : KZ = DE : AD$

Cioè:

$(10 - x) : y = 10 : 30$

da cui segue che

$10y = 300 - 30x$ che semplificato dà

$y = 30 - 3x$

Il triangolo KZF è isoscele per costruzione, quindi $KZ = ZF$, cioè

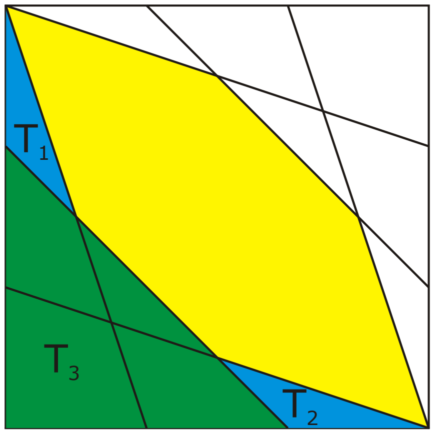
$y = 20 - x$

Uguagliando le due y delle due equazioni trovate si scopre che

$30 - 3x = 20 - x$

$x = 5\,cm$ e di conseguenza $y = 15\,cm$.

A questo punto calcolare l'area dell'esagono risulta estremamente facile:



$$T_1 = T_2 = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\,cm^2$$

$$T_3 = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200\,cm^2$$

$$A_{esagono} = A_{quadrato} - 2 \cdot (T_1 + T_2 + T_3) = 900 - 2(25 + 25 + 200) = 900 - 500 = 400\,cm^2$$