



# “COPPA MATHESIS”



GARA DI MATEMATICA A SQUADRE – VII<sup>^</sup> EDIZIONE

Thiene 21 aprile 2017

Finale Provinciale tra gli Istituti Scolastici di

BASSANO IC2 - BASSANO IC3 - BREGANZE - CASTELGOMBERTO - COSTABISSARA - MALO  
MAROSTICA - MONTECCHIO M. (GIUSEPPINI) - MONTICELLO C.O. - NOVE - ORGIANO - ROSÀ  
SAREGO - SCHIO IC1 - TRISSINO - VALDAGNO IC2 - VICENZA (DAME INGL.) - VICENZA IC8

# FROZEN



## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\sqrt{3} = 1,73$$

$$\sqrt{5} = 2,24$$

$$\pi = 3,14$$

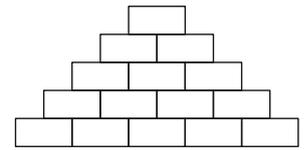
### SCADENZE IMPORTANTI

- **15 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.



### 1. CUORE DI GHIACCIO

“Quando il vento avvolge i monti con il suo gelido abbraccio, l'unione forma un cuore freddo dal quale nasce il ghiaccio.” Così cantava il piccolo Kristoff mentre imparava il mestiere del venditore di ghiaccio. Mentre lui Con molta fatica era riuscito a caricare sulla slitta della piccola alce Sven un bel blocco di ghiaccio, gli anziani invece, più esperti, avevano realizzato una piramide di blocchi simile a quella in figura. Se alla base invece di 5 vi fossero 12 blocchi di ghiaccio, quanti ce ne sarebbero in tutto?



### 2. FACCIAMO UN PUPAZZO ASSIEME (NON facile!!)

Elsa e Anna sono le figlie della famiglia reale di Arendelle, un regno situato su un fiordo della penisola scandinava. Fin da bambina Elsa ha scoperto di avere un particolare potere magico: può infatti creare e manipolare il ghiaccio. Spesso Anna ed Elsa giocano nel grande salone sfruttando il potere di Elsa. Una sera Elsa crea un pupazzo di neve alto 1 metro, che Anna battezza Olaf. Con un getto di ghiaccio lo divide prima in due pupazzi, poi in quattro ed infine in otto pupazzi tutti uguali fra loro e simili a quello iniziale. Se il volume totale degli otto pupazzi è pari a quello del pupazzo intero, quanto sono alti gli otto pupazzi in millimetri?

### 3. I TROLL

Una sera Elsa finisce per colpire involontariamente Anna alla testa con un getto di ghiaccio, che la lascia priva di sensi. Il re e la regina di Arendelle chiedono quindi aiuto ai Troll, il cui re, Gran Papà, spiega che il potere di Elsa dev'essere usato con cautela: nonostante il potere sia un dono, esso rappresenta anche una tremenda maledizione. Gran Papà quindi esegue il seguente calcolo:

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4}{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4}$$

Grazie al risultato cura Anna e rimuove dalla sua mente il ricordo dei poteri della sorella, senza cancellare i bei momenti trascorsi insieme. I regnanti promettono che Elsa imparerà a controllare il suo potere e, da quel giorno, decidono di tenere la figlia maggiore nascosta al mondo e addirittura ad Anna. Quale numero ha permesso al troll di curare Anna?

### 4. IL POTERE CRESCE

Con l'età il potere di Elsa cresce. Ogni anno che passa riesce a produrre più neve del precedente. Ad un anno crea 1 Kg di neve, a due anni ne produce 4 più del precedente. A tre, 9 più dell'anno prima e via di seguito. Ogni anno che passa Elsa riesce ad aggiungere ai suoi poteri una quantità di neve pari al quadrato dell'età compiuta. Quanti Kg di neve sarà in grado di creare Elsa a 10 anni, quando i suoi genitori si ritrovano ad essere vittime di un tragico viaggio in mare?

### 5. L'INCORONAZIONE

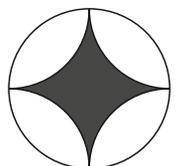
Al compimento della maggior età di Elsa, viene organizzata una grande festa e il palazzo è riaperto al popolo per la prima volta dopo molto tempo. Per evitare di rivelare il suo potere, Elsa indossa dei guanti, ma durante la cerimonia deve reggere a mani nude lo scettro e il globo rappresentante il mondo. Per non evocare la magia, cerca di distrarsi pensando ad un problema matematico: “Quanti sono i numeri in cui la cifra delle centinaia è pari alla somma della cifra delle unità e delle decine?” Lo stratagemma riesce ed il suo potere non viene scoperto. Qual è la risposta al quesito di Elsa?

### 6. LA FINE DELL'ESTATE

Anna conosce uno degli invitati, il Principe Hans delle Isole del Sud, ultimo di 8 fratelli. I due si piacciono subito e lui le chiede di sposarlo. Anna accetta ingenuamente e si chiede in quanti modi diversi potrà conoscere i 7 fratelli (di cui 3 femmine e 4 maschi), rispettando la tradizione secondo cui bisogna incontrarli alternativamente maschio-femmina-maschio-femmina e così via. Elsa, però, negala sua benedizione alla coppia. Anna, sorpresa e dispiaciuta per la decisione della sorella, le rinfaccia tutti gli anni di solitudine che ha dovuto trascorrere a causa sua e dei suoi poteri. Nasce così una discussione tra le due sorelle, durante la quale Elsa perde il controllo ed involontariamente sprigiona i suoi poteri davanti a tutti i presenti, rivelandoli e causando un inverno perenne su Arendelle. Quale sarebbe stata la soluzione alla curiosità di Anna se lei avesse avuto il tempo di rifletterci?

### 7. IL PALAZZO SULLA MONTAGNA

Elsa, fuggita dal castello, trova rifugio in cima alla Montagna del Nord. Qui, sentendosi libera per la prima volta da tutti i vincoli, dalle imposizioni e soprattutto dalle sue paure, decide di dare completo sfogo ai suoi poteri. Costruisce un magnifico palazzo di ghiaccio a partire dalla base riportata nella figura a fianco. Se il raggio della circonferenza misura 50 m, quanto vale l'area della parte scura, area sulla quale poggia il palazzo?



## 8. KRISTOFF E SVEN

Nel frattempo Anna si mette all'inseguimento di Elsa, pensando di poter chiarire tutto e di riportarla sul trono, ed incarica Hans di regnare temporaneamente su Arendelle. Durante il viaggio, Anna fa la conoscenza di Kristoff, un affascinante venditore di ghiaccio. Kristoff spiega ad Anna che, una volta, un metro cubo di ghiaccio veniva venduto alla cifra di 1000 monete. Adesso che l'inverno è sceso, il costo del ghiaccio ha avuto prima una diminuzione del 20%. Poi, dal prezzo raggiunto, è sceso di un ulteriore 30% ed infine il suo costo si è dimezzato. "Con il prezzo a cui vendo il ghiaccio adesso non riesco nemmeno a sfamare la mia renna Sven." Qual è il prezzo di vendita attuale in monete?



## 9. I LUPI

Dopo un rocambolesco inseguimento da parte di un branco di lupi, la principessa convince Kristoff a farle da guida verso la montagna, con la promessa di avviare un fiorente commercio di ghiaccio e di regalargli una nuova slitta, dal momento che la sua è andata distrutta. "Ma quanti lupi ci hanno inseguito?" le chiede ad un certo punto Kristoff. Anna, ripensandoci a mente fredda, si ricorda che i lupi durante l'inseguimento si erano inizialmente disposti in fila per 4, poi per 5, ed infine per 7, ed in ognuna delle disposizioni avanzavano sempre 3 lupi fuori dalle file. Con questi dati, Anna conclude che si può fare una stima minima del numero dei lupi. Quale numero dà la principessa al commerciante di ghiaccio?



## 10. OLAF

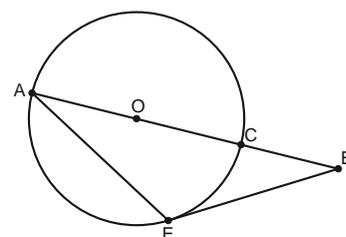
Lungo la scalata della Montagna del Nord, il gruppo fa la conoscenza di Olaf, il pupazzo di neve al quale Elsa ha dato vita con la sua magia. Olaf sa dove vive la regina, ma non li condurrà lì finché non avranno risposto alla sua domanda: "Qui davanti a me sulla neve ho appena disegnato due triangoli rettangoli isosceli. L'ipotenusa del primo triangolo e il cateto del secondo misurano entrambi 100 cm. Quanto vale la differenza tra le aree dei due triangoli che ho tracciato?" Con l'intuito di Anna il problema è presto risolto. Qual è la risposta (in  $\text{cm}^2$ )?

## 11. AL CASTELLO

Ottenuta la risposta, Olaf mantiene la promessa e conduce Anna al castello di Elsa. Mentre salgono la grande scalinata di ghiaccio Olaf chiede a bruciapelo: "Quanti sono i numeri palindromi da 1 a 10000?". Anna non ha tempo di pensarci su e spingendo il pesante portale entra nel castello. Quale sarebbe stata la risposta al problema di Olaf? (I numeri palindromi sono numeri che si leggono indifferentemente da destra a sinistra e da sinistra a destra. Ad esempio 1001.)

## 12. UN COLPO AL CUORE

Le due sorelle si ritrovano finalmente, ma ben presto litigano: Anna vorrebbe riportare Elsa a casa, ma quest'ultima ha ancora paura di poterle far male e rifiuta l'offerta. Tuttavia, quando Anna insiste, Elsa perde nuovamente il controllo. Anna si trova nel punto  $A$  della figura, mentre Elsa nel punto  $E$  quando, inavvertitamente, nella furia, spara una raffica di gelo che percorre tutto l'angolo  $\widehat{BEA}$  fino a colpire Anna al cuore. Sapendo che  $A$ ,  $C$ ,  $B$  e  $O$  (centro della circonferenza) sono allineati, che  $BE$  è tangente alla circonferenza e che l'angolo  $\widehat{CBE}$  misura  $42^\circ$ , quanto vale l'angolo  $\widehat{BEA}$ ?



## 13. MARSHMALLOW

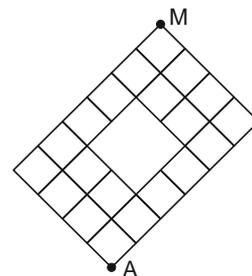
Elsa, sconvolta, calcola velocemente quale frazione si trova esattamente a metà tra  $\frac{5}{12}$  e  $\frac{11}{15}$ , infondendo il risultato in un cumulo di neve. Nasce Marshmallow, un gigantesco mostro di ghiaccio il quale afferra subito Anna e Kristoff e li butta fuori dal castello. Che numero ha dato vita a Marshmallow? Dai come soluzione la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione che otterrai, ridotta ai minimi termini.

## 14. IL CONGELAMENTO DI ANNA

Al termine della fuga, i capelli di Anna cominciano a diventare bianchi e la ragazza avverte un fortissimo freddo. Kristoff la porta dai Troll, immaginando che questi siano capaci di guarirla nuovamente. Questa volta però, Gran Papà spiega: "Magari fosse facile curare Anna, così come è facile come calcolare quanti sono i numeri compresi tra 0 e 1000 che sono il prodotto di due numeri (eventualmente anche uguali) entrambi multipli di 3. Ma siccome Anna è stata colpita al cuore, solo un atto di vero amore potrà salvarla dal diventare completamente di ghiaccio." Quanti sarebbero i numeri di cui parlava Gran Papà nella sua analogia?

### 15. GIÙ DALLA MONTAGNA

Anna e Kristoff decidono di partire verso Arendelle (A), credendo che Hans possa salvare Anna baciandola. Scendono dalla montagna (M) seguendo solamente uno qualsiasi dei sentieri indicati in figura, non sapendo però che nel frattempo il principe è partito verso il castello di Elsa. In quanti modi diversi Anna e Kristoff possono raggiungere Arendelle?



### 16. RIVELAZIONI

Anna torna alla reggia, sempre più debole, ma quando chiede ad Hans di baciarla, questi le nega il bacio e con quello la salvezza, confessandole di non averla mai amata e di aver finto per poter regnare su Arendelle. Anna, addolorata per le parole di Hans e morente, pensa che ormai non ci sia più una soluzione per impedirle di ghiacciare completamente e morire... Ma in quel momento Olaf la ritrova e le svela che Kristoff è innamorato di lei e che forse un suo bacio la può salvare. Per rallentare la morte imminente e riscaldarla, le pone un quesito sul quale riflettere: "Sto pensando a tre numeri interi. Se li sommo a due a due ottengo 153, 79 e 128. Quanto vale il più grande dei tre numeri?"

### 17. IL TRADIMENTO DI HANS

Hans accusa la regina Elsa di essere responsabile del lungo inverno e riesce a convincere tutti che la sua condanna a morte riporterebbe l'estate su Arendelle. Elsa, sentendo arrivare i suoi carcerieri, pur con le mani legate, decide di concentrarsi per scatenare il suo potere. Prende due numeri la cui somma fa 233, divide il più grande per il più piccolo e ottiene quoziente 14 e resto 8. Quindi prende un grande respiro e si concentra, pensa la differenza tra i due numeri scatenando una tempesta di neve, che permette ad Elsa di fuggire. Quanto vale questa differenza che ha salvato Elsa?

### 18. DI CORSA FINO AD ARENDELLE

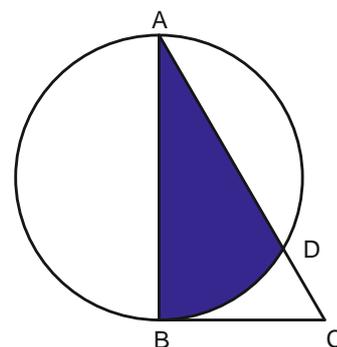
Nel frattempo Kristoff, resosi conto di amare Anna, cavalcando su Sven sta raggiungendo Arendelle. Per andare più veloce pensa a dieci numeri consecutivi. Esegue mentalmente la somma e ottiene 508, ma per la fretta nella somma ne dimentica uno. Quando raggiunge il mare ghiacciato davanti alla città di Arendelle, vede in lontananza Anna e la Regina Elsa attaccate da Hans. Hans non ha più tempo per correggere l'errore nella somma. Quale numero ha tralasciato in questa somma?

### 19. IL VERO AMORE

Mentre Anna vede giungere Kristoff e con lui la salvezza, si accorge che Hans che sta per uccidere Elsa. Dovendo scegliere tra la sua vita e quella della sorella, sceglie per quest'ultima e si lancia sulla traiettoria della spada, salvando Elsa e diventando una statua di ghiaccio. Anna ha scelto così di rinunciare alla propria vita per salvare la sorella, mostrando in realtà un atto di vero amore fraterno e permettendo al suo cuore di ghiaccio di sciogliersi e di risvegliarsi. Elsa allora capisce che la chiave per controllare i suoi poteri è proprio l'amore. Calcola velocemente il resto della divisione di  $102^{12}$  per 100 e riesce finalmente a spezzare l'incantesimo dell'inverno perenne. Quale resto ha trovato?

### 20. L'AMORE SCIOGLIE IL GHIACCIO

Hans viene allontanato da Arendelle e ricondotto nel suo regno, mentre Anna e Kristoff sono liberi di amarsi. Ad Olaf, che stava iniziando a sciogliersi, riesce a sopravvivere grazie ad un ulteriore incantesimo di Elsa, la quale riprende il suo posto come regina di Arendelle smettendo di nascondere i suoi poteri e decidendo di metterli al servizio del bene comune. Per festeggiare il ritorno della pace nel regno, Elsa con un tocco di magia realizza al centro della piazza di Arendelle una pista di pattinaggio per la gioia di tutti i bambini della città. La pista è la parte comune tra una circonferenza di raggio 90 m ed il triangolo ABC (come in figura). Sapendo che BC è tangente alla circonferenza e che l'angolo  $\hat{BAC} = 30^\circ$ , Quanto vale l'area della pista? (Se necessario, usa le approssimazioni date nell'intestazione della gara.)



## IN BOCCA AL LUPO

